LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, serija B
61 tomas, 2020, 1–7
https://doi.org/10.15388/LMR.2020.22466

Centrinė ribinė teorema trikampių masyvų klasės skaičiams, asocijuotiems su Ermito daugianariais

Igoris Belovas[a,b]

[a] *Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Vilniaus Universitetas*
Akademijos 4, LT-08412 Vilnius
[b] *Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, Vilniaus Gedimino technikos universitetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: Igoris.Belovas@mif.vu.lt

Įteiktas 2020 lapkričio 4; publikuotas 2021 kovo 15

Santrauka. Straipsnyje yra tęsiamas ribinių teoremų trikampių masyvų klasės skaičiams tyrimas. Yra išvedamos skaičių, asocijuotų su Ermito daugianariais, pusiau eksponentinės generuojančios funkcijos, bei pačių skaičių analizinės išraiškos. Gauti rezultatai yra panaudojami asimptotinio normalumo įrodymui ir konvergavimo į ribinį dėsnį greičio nustatymui.

Raktiniai žodžiai: ribinės teoremos; konvergavimo greitis; kombinatoriniai skaičiai; asimptotinis normalumas; Ermito daugianariai

AMS: 33C45, 05A16, 60F05

1 Įvadas

Straipsnyje yra nagrinėjamas dalinis trikampių masyvų klasės skaičių [3] atvejis. Trikampių masyvų klasės skaičiai apibrėžiami rekurentiniu sąryšiu

$$a_{nk} = f_1(n,k)a_{n-1,k-1} + f_2(n,k)a_{n-1,k}, \tag{1}$$

kur $a_{00} = 1$ ir $a_{nk} = 0$, kai $\min(n-k, n, k) < 0$. Taigi, pakanka nagrinėti sveikuosius $n \geqslant k \geqslant 0$. Darbe [1] buvo išvesta (1) skaičių su tiesiniais koeficientais

$$f_1(n,k) = k_{11}n + k_{12}k + k_{13}, \qquad f_2(n,k) = k_{21}n + k_{22}k + k_{23}, \quad k_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

generuojančios funkcijos bendroji dalinių išvestinių diferencialinė lygtis.

1 teorema. (Belovas [1]) *Skaičių* (1)–(2) *pusiau eksponentinė generuojanti funkcija*

$$F(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\frac{x^n}{n!}y^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\frac{x^n}{n!}y^k, \tag{3}$$

tenkina tiesinę pirmosios eilės dalinių išvestinių diferencialinę lygtį

$$(1-k_{11}xy-k_{21}x)F'_x-(k_{12}y^2+k_{22}y)F'_y=(k_1y+\tilde{k}_2)F, \tag{4}$$

su pradine sąlyga $F|_{x=0}=1$. *Čia*

$$k_1=k_{11}+k_{12}+k_{13},\qquad \tilde{k}_2=k_{21}+k_{23}. \tag{5}$$

Trikampių masyvų klasės skaičiams, asocijuotiems su Ermito daugianariais,

$$k_{12}=-2k_{11},\qquad k_{13}=k_{11},\qquad k_{21}=k_{22}=0,\quad \text{kai } k_{11},k_{23}\neq 0. \tag{6}$$

Pastebėsime, kai $k_{11}=0$, galima atskirti kintamuosius ir išspręsti (4) lygtį charakteristikų metodu. Atvejai, kai $k_{11}\neq 0$, yra sudėtingesni ir reikalauja detalaus nagrinėjimo. Toliau straipsnyje simboliu $\Phi(x)$ žymėsime standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt,\quad x\in\mathbb{R},$$

$\Gamma(x)$ – gama funkciją, ir $H_n(z)$ – (fizikinius) Ermito daugianarius,

$$H_n(z)=n!\sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^j}{j!(n-2j)!}(2z)^{n-2j}.$$

Visos ribos straipsnyje, jei nepažymėta kitaip, skaičiuojamos kai $n\to\infty$.

2 Generuojanti funkcija ir analizinė išraiška

1 lema. *Trikampių masyvų klasės skaičiai, asocijuoti su Ermito daugianariais, turi*

(i) *generuojančią funkciją*

$$F(x,y)=\exp\left(k_{23}x+\frac{1}{2}k_{11}k_{23}x^2y\right), \tag{7}$$

(ii) *ir analizinę išraišką*

$$a_{nk}=\frac{(2k)!}{2^kk!}C_n^{2k}(k_{11})^k(k_{23})^{n-k}. \tag{8}$$

Įrodymas. 1^0. Tegu $a_{nk}=(k_{23})^n\alpha_{nk}$, t.y.,

$$\alpha_{nk}=(\beta n-2\beta k+\beta)\alpha_{n-1,k-1}+\alpha_{n-1,k}, \tag{9}$$

kur $\beta = k_{11}/k_{23}$. Pastebime, kad

$$F(x,y) = \tilde{F}(k_{23}x, y), \tag{10}$$

kur $\tilde{F}(x,y)$ yra skaičių α_{nk} pusiau eksponentinė generuojanti funkcija. Pagal Teoremą 1, skaičius α_{nk} atitinka dalinių išvestinių diferencialinė lygtis

$$(1-\beta xy)\tilde{F}'_x + 2\beta y^2 \tilde{F}'_y = \tilde{F}, \qquad \tilde{F}|_{x=0} = 1. \tag{11}$$

Keitiniu

$$\tilde{F}(x,y) = \Psi(x,y)\exp\bigl(-(2\beta y)^{-1}\bigr) \tag{12}$$

transformuojame dalinių išvestinių diferencialinę lygtį (11) į homogeninę formą:

$$(1-\beta xy)\Psi'_x + 2\beta y^2 \Psi'_y = 0, \qquad \Psi|_{x=0} = \eta(y) = \exp\bigl((2\beta y)^{-1}\bigr). \tag{13}$$

Homogeninę diferencialinę lygti (13) atitinka simetrinė diferencialinė lygtis

$$\frac{dx}{1-\beta xy} = \frac{dy}{2\beta y^2}. \tag{14}$$

Jos bendrasis integralas yra

$$\psi(x,y) = \frac{\beta xy + 1}{\beta\sqrt{y}} = C. \tag{15}$$

Atsižvelgę į pradinę sąlygą, išsprendžiame (15) y atžvilgiu, $y = \omega(C) = \beta^{-2}C^{-2}$. Pakeitę C bendruoju integralu gauname funkciją $\omega(\psi(x,y))$ ir užrašome Koši uždavinio sprendinį

$$\Psi(x,y) = \eta\bigl(\omega\bigl(\psi(x,y)\bigr)\bigr) = \exp\left(\frac{(1+\beta xy)^2}{2\beta y}\right). \tag{16}$$

Įstatę $\Psi(x,y)$ išraišką į keitinį (12), gauname diferencialinės lygties (11) sprendinį, t.y., skaičių α_{nk} generuojančią funkciją

$$\tilde{F}(x,y) = \exp\left(x + \frac{1}{2}\beta y x^2\right) = \exp\left(k_{23}\left(\frac{x}{k_{23}}\right) + \frac{1}{2}k_{11}k_{23}y\left(\frac{x}{k_{23}}\right)^2\right), \tag{17}$$

ir kartu (pl. (10)) pirmą lemos teiginį.

2^0. Formali Teiloro eilutė dviejų kintamųjų generuojančiai funkcijai (3) yra

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial y^k}F(x,y)\bigg|_{(0,0)}\right)\frac{x^n y^k}{n!k!}.$$

Skaičių a_{nk} analizinę išraišką gauname skaičiuojant dalines išvestines,

$$a_{nk} = (k_{23})^n \alpha_{nk} = \frac{(k_{23})^n}{k!}\frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial y^k}\tilde{F}(x,y)\bigg|_{(0,0)}. \tag{18}$$

Pritaikę Leibnico formulę, gauname

$$\begin{aligned}\alpha_{nk} &= \frac{\beta^k}{k!2^k}\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^{2k}\exp\left(x+\frac{1}{2}\beta y x^2\right)\bigg|_{(0,0)}\\ &= \frac{\beta^k}{k!2^k}C_n^{2k}(2k!)\,\frac{\partial^{n-2k}}{\partial x^{n-2k}}\exp\left(x+\frac{1}{2}\beta y x^2\right)\bigg|_{(0,0)}\\ &= \frac{(k_{11})^k}{(k_{23})^k k!2^k}C_n^{2k}(2k!)\underbrace{\sum_{j=0}^{n-2k}C_{n-2k}^j\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta^r y^r x^{2r}}{2^r r!}\right)\bigg|_{(0,0)}}_{=1}.\end{aligned} \tag{19}$$

Tai, kartu su (18), užbaigia lemos įrodymą. □

3 Ribinė teorema

Panaudosime Chvano rezultatą (žr. Lema 2) apie konvergavimo centrinėje ribinėje teoremoje kombinatorinėms struktūroms greitį (Išv. 2, Sk. 4 [2]). Tegu Ω_n yra sveikaskaitis atsitiktinis dydis su tikimybėmis, nusakomomis formule

$$P(\Omega_n = k) := \frac{a_{nk}}{\sum_{k=0}^n a_{nk}} = \frac{\alpha_{nk}}{\sum_{k=0}^n \alpha_{nk}}. \tag{20}$$

Atsitiktinio dydžio Ω_n momentus generuojanti funkcija yra

$$M_n(s) = E(e^{\Omega_n s}) = \sum_{k=0}^n P(\Omega_n = k)e^{ks} = \left(\sum_{k=0}^n a_{nk}\right)^{-1}\sum_{k=0}^n a_{nk}e^{ks}. \tag{21}$$

Įstatę (21) į pusiau eksponentinės generuojančios funkcijos išraišką (3), gauname

$$F(x,e^s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^n a_{nk}e^{sk} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}S_n M_n(s),$$

kur

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_{nk}.$$

Taigi momentus generuojančią funkciją galima rasti, skaičiuojant pusiau eksponentinės generuojančios funkcijos $F(x,y)$ dalines išvestines taške $x=0$,

$$M_n(s) = S_n^{-1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}F(x,e^s)\bigg|_{x=0}. \tag{22}$$

Kadangi $M_n(0)=1$, kartu turime ir formulę sumai S_n,

$$S_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}F(x,e^s)\bigg|_{(0,0)}. \tag{23}$$

2 lema. (Chvanas [2]) *Tegu $P_n(z)$ yra neneigiamo sveikaskaičio atsitiktinio dydžio Ω_n generuojanti funkcija, su vidurkiu μ_n ir dispersija σ_n^2. Tarkime, kad bet kokiam fiksuotam $n \geqslant 1$, $P_n(z)$ yra Hurvico daugianaris. Jei $\sigma_n \to \infty$, tai*

$$P\left(\frac{\Omega_n - \mu_n}{\sigma_n} < x\right) = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\sigma_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

2 teorema. *Jei $F_n(x)$ yra atsitiktinio dydžio Ω_n (20) skirstinys, skaičiai a_{nk} tenkina Lemos 1 sąlygas ir β yra teigiamas, tai*

$$F_n(\sigma_n x + \mu_n) = \Phi(x) + O(n^{-1/4}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Atsitiktinio dydžio Ω_n vidurkis ir dispersija yra lygūs

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{n}{2}\left(1 - 2\tau\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)}\right), \\ \sigma_n^2 &= -\frac{n\tau^2}{2}\left(1 - (2\tau + 1/\tau)\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)} + 2n\left(\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)}\right)^2\right), \end{aligned} \tag{26}$$

atitinkamai. Čia $\tau = 1/(i\sqrt{2\beta}\,)$.

Įrodymas. Atsižvelgę į apibrėžimą (20), toliau nagrinėsime skaičius α_{nk} iš Lemos 1. Raskime atsitiktinio dydžio Ω_n momentus generuojančią funkciją (žr. (22)). Skaičiuojant funkcijos $\tilde{F}(x, e^s)$ (17) n-ąją dalinę išvestinę, gauname

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\tilde{F}(x, e^s)\bigg|_{x=0} &= \sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{\partial^j}{\partial x^j}\exp\left(\frac{1}{2}\beta e^s x^2\right)\bigg|_{x=0} \\ &= \sum_{j=0}^{n} C_n^j \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta^r e^{sr}}{2^r}(x^{2r})^{(j)}_{x=0} = \sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{n!t^j}{j!(n-2j)!} = (i\sqrt{t})^n H_n\left(\frac{1}{2i\sqrt{t}}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

kur $t = \beta e^s/2$. Pagal (22)–(23), momentus generuojanti funkcija yra

$$M_n(s) = \frac{\sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{(\beta e^s/2)^j}{j!(n-2j)!}}{\sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{(\beta/2)^j}{j!(n-2j)!}} = e^{sn/2}\frac{H_n(\tau e^{-s/2})}{H_n(\tau)}. \tag{28}$$

Ermito daugianarių išvestinė yra $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$, taigi

$$\begin{aligned} M_n'(0) &= \mu_n = \frac{n}{2}\left(1 - 2\tau\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)}\right), \\ M_n''(0) &= \frac{n^2}{4} - (n^2 - n/2)\tau\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)} + (n^2 - n)\tau^2\frac{H_{n-2}(\tau)}{H_n(\tau)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Pritaikius formulę $\sigma_n^2 = M_n''(0) - M_n'^2(0)$ ir Ermito daugianarių rekurentinį sąryšį $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$, apskaičiuojame dispersiją

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{n}{2}\tau\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)} + (n^2 - n)\tau^2\frac{H_{n-2}(\tau)}{H_n(\tau)} - n^2\tau^2\frac{H_{n-1}^2(\tau)}{H_n^2(\tau)} \\ &= -\frac{n\tau^2}{2}\left(1 - (2\tau + 1/\tau)\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)} + 2n\left(\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Pasinaudoję Ermito daugianarių

$$H_n(x) \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} e^{x^2/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cos(x\sqrt{2n} - n\pi/2),$$

ir santykio $\Gamma(n+d)/\Gamma(n) \sim n^d$ asimptotinėmis išraiškomis, gauname

$$\frac{H_{n-1}(\tau)}{H_n(\tau)} \sim -\frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{\sin(\tau\sqrt{2n-2} - n\pi/2)}{\cos(\tau\sqrt{2n} - n\pi/2)} \sim \frac{i}{\sqrt{2n}} e^{\frac{-1}{\sqrt{\beta(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}}}. \tag{31}$$

Turime (žr. (30))

$$\sigma_n^2 \sim \frac{n}{4\beta}\left(1 + \frac{\beta-1}{\sqrt{\beta n}} e^{\frac{-1}{\sqrt{\beta(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}}} - e^{\frac{-2}{\sqrt{\beta(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}}}\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{\beta}},$$

taigi $\sigma_n^2 \to \infty$. Atsitiktinio dydžio Ω_n generuojanti funkcija yra

$$P_n(z) = M_n(\ln z) = z^{n/2} \frac{H_n(\tau z^{-1/2})}{H_n(\tau)}. \tag{32}$$

Hurvico daugianariu yra vadinamas daugianaris, kurio nuliai guli pusplokštumėje $\Re z \leqslant 0$. Ermito daugianarių šaknys u_j yra realieji skaičiai. Taigi, generuojančios funkcijos $P_n(z)$ šaknys yra neigiamos. Iš tikrųjų,

$$z_j = \tau^2/u_j^2 = -\frac{1}{2\beta u_j^2} < 0,$$

užbaigiant teoremos įrodymą. $\square$

1 pastaba. Iš formulių (10), (23) ir (27) išplaukią, kad skiačių a_{nk} suma yra

$$S_n = (k_{23})^n \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!(\beta/2)^j}{j!(n-2j)!} = Q_n\left(k_{23}, \frac{k_{11}k_{23}}{2}\right), \tag{33}$$

kur $Q_n(x,t)$ yra n-jo laipsnio šilumos laidumo daugianaris, t.y. paraboliškai n-homogeninis daugianaris, tenkinantis šilumos laidumo lygtį $Q_t = Q_{xx}$. „Paraboliškai n-homogeninis” reiškia $Q(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^n Q(x,t)$ su $\lambda > 0$ (žr. [4]).

Literatūra

[1] I. Belovas. Limit theorems for numbers satisfying a class of triangular arrays. *Glas. Mat.*, 2021 (įteiktas).

[2] H.-K. Hwang. On convergence rates in the central limit theorems for combinatorial structures. *Eur. J. Combin.*, **19**(3):329–343, 1998. https://doi.org/10.1006/eujc.1997.0179.

[3] A. Kyriakoussis. A central limit theorem for numbers satisfying a class of triangular arrays. *Discrete Math.*, **51**:41–46, 1984. https://doi.org/10.1016/0012-365X(84)90022-0.

[4] P. Poláčik, V. Šverák. Zeros of complex caloric functions and singularities of complex viscous Burgers equation. *J. für die Reine und Angew. Math.*, **616**:205–217, 2008. https://doi.org/10.1515/CRELLE.2008.022.

SUMMARY

A central limit theorem for numbers satisfying a class of triangular arrays associated with Hermite polynomials

I. Belovas

The paper extends the investigations of limit theorems for numbers satisfying a class of triangular arrays. We obtain analytical expressions for the semi-exponential generating function the numbers, associated with Hermite polynomials. We apply the results to prove the asymptotic normality of the numbers and specify the convergence rate to the limiting distribution.

Keywords: limit theorems; combinatorial numbers; asymptotic enumeration; asymptotic normality; Hermite polynomials